Dualität

Dem Standartproblem der linearen Optimierung

(P): $$\boxed{\begin{array}{c} Z=C^Tx \rightarrow \max \\ A\,x \le b \\ x \ge 0 \end{array}}$$ (primales Problem)

Lässt sich formal das folgende lineare Optimierungsproblem

(D) $$\boxed{\begin{array}{c} v = b^Ty \rightarrow \min \\ A^Ty \ge c \\ y \ge 0 \end{array}}$$ (duales Problem)

mit A als m×n Matrix

$c,x \in R^n$

$b,y \in R^m$

zuordnen.

Dualität

Satz: Das duale Problem des dualen Problems ist das primale Problem.

Beweis:
$$\begin{array}{c} \min \{b^Ty\} \\ A^Ty \ge c \\ y \ge 0 \end{array} = \begin{array}{c} -\min \{-b^Ty\} \\ -A^Ty \le -c \\ y \ge 0 \end{array} = \begin{array}{c} -\min \{-c^Tu\} \\ (-A^T)^Tu \ge -b \\ u \ge 0 \end{array}$$

Satz: Sind x* und y* optimale Lösungen des primalen und des dualen Problems, so gilt:

$$C^Tx^* = b^Ty^*$$

(d.h. Zielfunktionswerte der beiden Lösungen stimmen überein.)

Dualität

Es gilt die Äquivalenz (1) ⇔ (2) ⇔ (3) mit

(1) es existieret je eine zulässige Lösung x des primalen und eine zulässige Lösung y des dualen Problems

(2) es existiert eine Optimallösung x* des primalen Problems

(3) es existiert eine Optimallösung y* des dualen Problems

Für zulässige Lösungen x, y gilt $c^T x \leq b^T y$, d.h. die Zielfunktionswerte sind im Maximumproblem immer kleiner oder gleich den ZF-Werten im zugehörigen dualen Minimumproblem.

Dualität

Aus dem Endtableau des Simplexalgorithmus können neben den primalen Optimalstellen x* auch die dualen Optimalstellen y* abgelesen werden:

Var	$x_1 \ldots x_n$	$y_1 \ldots y_m$	Wert
ZF	$-\tilde{c}_1 \ldots -\tilde{c}_n$	$-\tilde{c}_{n+1} \ldots -\tilde{c}_{n+m}$	$\tilde{c}$
NB	Ã enthält E		$\tilde{b}$

<u>Lösung primales Problem:</u>

x* aus $\tilde{b}$ bestimmen

<u>Lösung duales Problem:</u>

$y^* = (-\tilde{c}_{n+1} \ldots \tilde{c}_{n+m})$

ZF-Wert $= \tilde{c}^T x^* = \tilde{b}^T y^* = \tilde{c}$

Beispielaufgabe: (Mischungsproblem)

[Hauke/Opitz], S. 86

Gesucht:
kostengünstigste Kombination von zwei Nahrungsmitteln für eine Diät.

Mindestaufnahme von Nährstoffen: mind. 24 ME Eiweiß, 12 ME Fett und 36 ME Kohlenhydrate

100g Nahrungsmittel A [x_1 (y_1)] enthalten 3 ME Eiweiß, 3 ME Fett und 6 ME Kohlenhydrate und kosten 3 €.

100g Nahrungsmittel B [x_2 (y_2)] enthalten 4 ME Eiweiß, 1 ME Fett und 4 ME Kohlenhydrate und kosten 2 €.

Zusammenfassung zwischen primalem und dualem Problem

P \ D	zulässige Lösung	keine zulässige Lösung
zulässige Lösung	max z = min v	z nach oben unbeschränkt (vgl. Bsp.1)
keine zulässige Lösung	v nach unten unbeschränkt	möglich, vgl. Bsp.2

Postoptimale Sensitivitätsanalyse

Inwieweit können Änderungen bei den Zielfunktionskoeffizienten in *c* und im Restriktionsvektor *b* vorgenommen werden, ohne dass die optimale Lösung „qualitativ" geändert wird?

Basisvariablen im Optimum bleiben erhalten

a) Variation der i-ten Restriktion $b_i \rightarrow b_i + \beta$ (≙ Parallelverschiebung der entsprechenden Restriktionsgeraden)

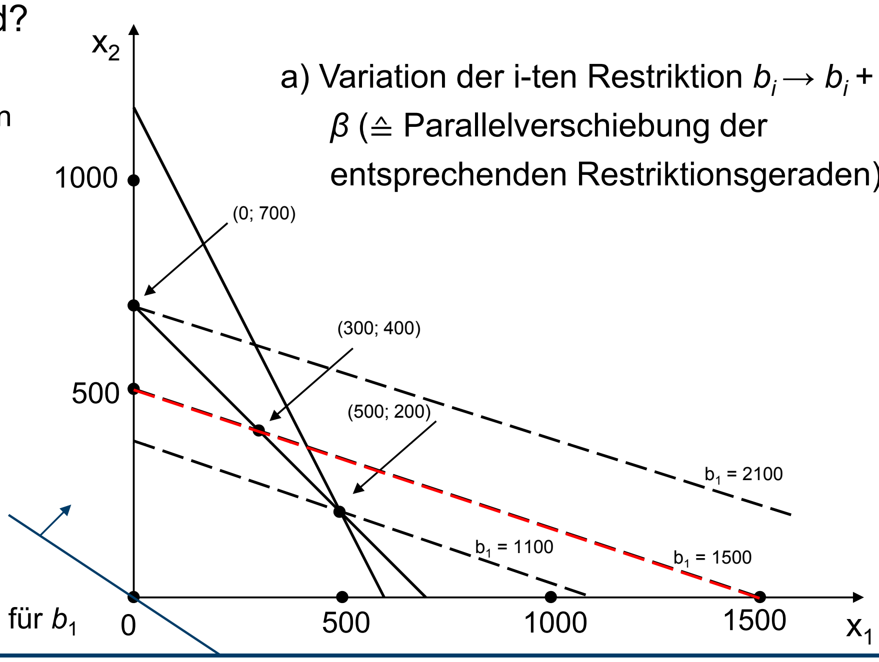

Abb.: Postoptimale Analyse für b_1

Postoptimale Sensitivitätsanalyse

b) Variation der j-ten ZF- Koeffizienten $c_j \rightarrow c_j + \gamma$

(≙ Veränderung der Steigung der Zielfunktion)

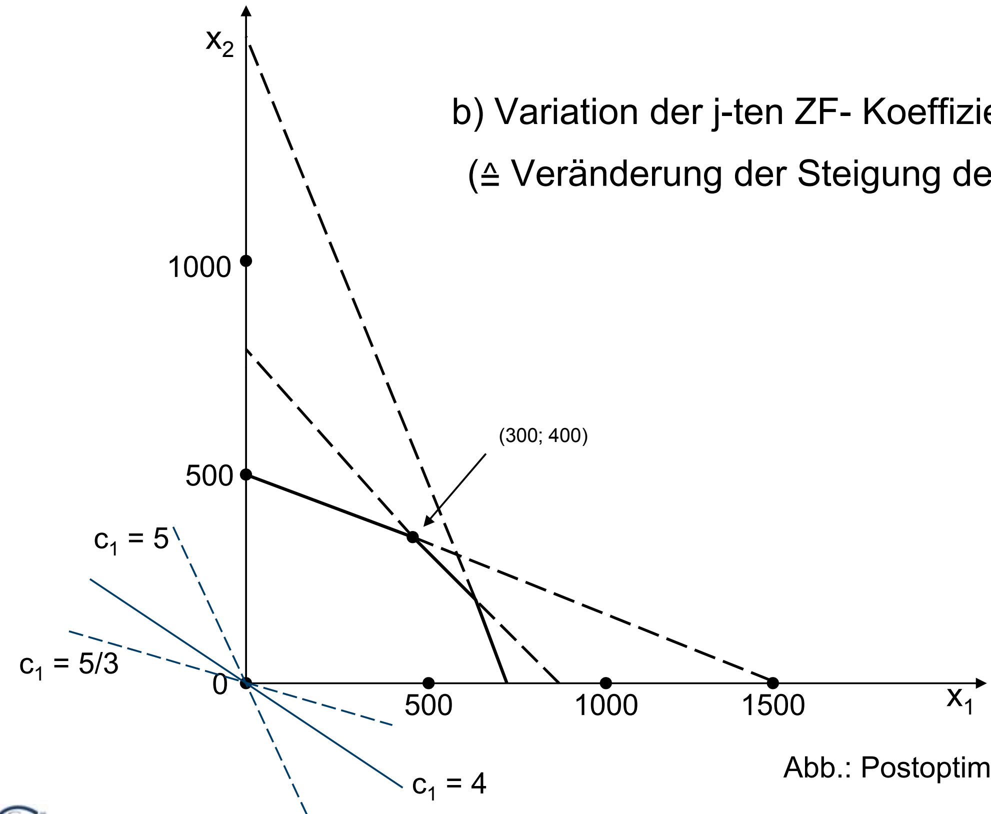

Abb.: Postoptimale Analyse für c_1